

文章编号: 1001-0920(2013)09-1329-06

# 一类含多面体不确定性多项式系统鲁棒镇定

黄文超, 孙洪飞, 曾建平

(厦门大学 信息科学与技术学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 针对一类含多面体不确定性的多项式系统, 研究其局部稳定鲁棒镇定问题. 基于多项式平方和 (SOS) 技术, 将该类非线性控制问题转换为凸的 SOS 规划问题, 并通过引入 S-procedure 技术, 保证了所得结论在局部范围内是有效的. 同时, 结合参数依赖 Lyapunov 函数方法, 给出了该类系统鲁棒性分析与鲁棒镇定控制问题的充分条件, 并将其描述为可由 SOS 规划技术直接求解的状态依赖线性矩阵不等式约束集. 最后, 通过数值仿真验证了该方法的有效性.

**关键词:** 多项式平方和; 多面体不确定性; 非线性; S-procedure

**中图分类号:** TP13

**文献标志码:** A

## Robust stabilization for a class of polynomial systems with polytopic uncertainties

HUANG Wen-chao, SUN Hong-fei, ZENG Jian-ping

(School of Information Science and Technology, Xiamen University, Xiamen 361005, China. Correspondent: ZENG Jian-ping, E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn)

**Abstract:** The sum of squares(SOS) and the S-procedure techniques are used to analyze the local robust stabilization problems for a class of polynomial systems with polytopic uncertainties. By using the SOS technique, the nonlinear control problems are converted into convex SOS programming ones. And the S-procedure technique guarantees that the result holds in a restricted region. Moreover, sufficient conditions are given for the robust stability analysis and robust stabilization control of the systems based on the parameter dependent Lyapunov function. All these solvability conditions are formulated as a constraint set of state dependent linear matrix inequalities, which can be solved by semidefinite programming relaxations based on SOS programming. Finally, a numerical example verifies the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** sum of squares(SOS); polytopic uncertainties; nonlinear; S-procedure

## 0 引言

近 20 年来, 多面体不确定系统鲁棒控制受到广泛的研究, 已取得了一系列线性系统框架下的成果. 早期的研究大多基于二次稳定思想, 寻找一个公共的 Lyapunov 函数使得位于多面体集合中的所有子系统渐近稳定<sup>[1-2]</sup>. 这样的条件很苛刻且存在较大的保守性. 随后, 参数依赖 Lyapunov 函数被用于研究多面体不确定性鲁棒控制问题, 研究证明该方法能够有效地降低所得结果的保守性<sup>[3-8]</sup>. 其中文献 [4] 的结果具有重要意义, 通过引入附加变量成功解耦了系统矩阵与 Lyapunov 函数矩阵之间的乘积项, 使得线性矩阵不等式技术能够应用到参数依赖 Lyapunov 函数方法处理多面体系统的控制问题中. 然而, 针对含多面体

不确定性的非线性系统的鲁棒控制研究, 其成果却寥寥无几<sup>[9-10]</sup>, 计算问题以及 Lyapunov 函数的构造是其面临的主要障碍.

近年来, 多项式平方和 (SOS) 理论取得重要进展, 有力促进了非线性控制理论的发展. 在 SOS 框架下, 许多非线性控制问题被重新研究, 如非线性状态反馈控制<sup>[11-13]</sup>、非线性输出反馈控制<sup>[14]</sup>、非线性离散系统综合<sup>[15]</sup>等, 并借助于 SOS 规划的求解工具 SOSTools<sup>[12-16]</sup>、YALMIP<sup>[11,17]</sup>获得了精确的解析解.

本文考虑一类含多面体不确定性的多项式系统, 结合参数依赖 Lyapunov 函数思想, 研究其局部稳定鲁棒镇定问题. 基于 SOS 理论和 S-procedure 技术, 首先给出了系统局部鲁棒稳定的分析条件, 并将其描述

收稿日期: 2012-05-20; 修回日期: 2012-06-25.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(61074004, 61374037); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20110121110017); 教育部留学回国人员科研启动基金项目[2009].

**作者简介:** 黄文超(1985—), 男, 博士生, 从事鲁棒控制的研究; 曾建平(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、复杂系统控制等研究.

成凸的 SOS 规划. 其次, 给出了使系统局部鲁棒稳定的状态反馈控制器的设计方法. 本文的主要贡献在于, 借助 SOS 理论将线性系统框架下的一些先进的处理思想推广到多项式系统中, 研究基于原非线性模型的控制问题, 避免了模型处理(如线性化等)带来的保守性; 所得出的基于 SOS 的控制方法, 避开了非线性控制中普遍存在数值计算与构造 Lyapunov 函数的困难, 并且得到的多项式型或有理型控制器易于工程实现.

## 1 预备知识与问题描述

### 1.1 SOS 相关知识

**定义 1**<sup>[16]</sup> 称多变量多项式  $p(x_1, \dots, x_n) \triangleq p(x)$  是 SOS, 如果存在多项式  $f_1(x), \dots, f_m(x)$ , 使得

$$p(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x).$$

SOS 条件是多项式非负性判别的一个充分条件, 且数值仿真实验表明由此带来的保守性很小<sup>[12,18]</sup>. 已有学者证明, 在某些情况下, SOS 和多项式非负是等价的<sup>[19]</sup>.

**引理 1**(SOS 分解)<sup>[16]</sup> 多项式  $p(x)$  是 SOS, 当且仅当存在一个半正定矩阵  $Q$ , 使得

$$p(x) = Z^T(x)QZ(x),$$

其中  $Z(x)$  是关于  $x$  的单项式向量.

SOS 分解为 SOS 多项式判别提供了有效的方法.

### 1.2 问题描述

考虑一类多项式系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (1)$$

其中:  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}^q$  分别表示系统状态和控制输入;  $f(x)$ ,  $g(x)$  为关于  $x$  的多项式函数. 假设系统(1)可表示成类线性系统形式<sup>[12]</sup>

$$\dot{x} = A(x)Z(x) + B(x)u. \quad (2)$$

其中:  $A(x)$ ,  $B(x)$  为关于  $x$  的多项式矩阵;  $Z(x)$  是由  $x$  单项式组成的  $N \times 1$  维列向量, 且满足以下假设.

**假设 1**  $Z(x) = 0$  当且仅当  $x = 0$ .

若系统(2)中  $A(x)$ ,  $B(x)$  属于多面体不确定集

$$\Omega := \left\{ [A(\delta, x) \ B(\delta, x)] = \sum_{i=1}^k \delta_i [A_i(x) \ B_i(x)], \sum_{i=1}^k \delta_i = 1, \delta_i \geq 0 \right\}, \quad (3)$$

则含有多面体不确定性的多项式系统(2)可表示为

$$\dot{x} = A(\delta, x)Z(x) + B(\delta, x)u. \quad (4)$$

其中:  $A_i(x)$ ,  $B_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 为适当维数的多项式矩阵;  $\delta_i \in \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 为时不变不确定性.

定义如下集合:

$$\beta_\nu := \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x_i| \leq \nu_i, x_i \in x\},$$

$$\nu_i > 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

结合式(4)和(5), 本文所研究的含多面体不确定性的多项式系统的局部稳定鲁棒镇定问题包括: 1) 局部鲁棒稳定性分析问题, 给出系统(4)基于参数依赖 Lyapunov 函数方法的局部渐近稳定的分析条件. 2) 局部稳定鲁棒镇定问题, 在问题1)的基础上, 找到一个状态反馈控制器  $u(x) = K(x)Z(x)$ , 使得系统(4)的平衡状态  $x = 0$  在  $x \in \beta_\nu$  区域内是渐近稳定的.

令  $M(x)$  为  $N \times n$  维多项式矩阵, 其元素定义为

$$M_{ij}(x) = \frac{\partial Z_i}{\partial x_j}(x), i = 1, 2, \dots, N.$$

令  $A_j(x)$ ,  $A_{i,j}(x)$  表示矩阵  $A(x)$ ,  $A_i(x)$  的第  $j$  行; 定义  $J = \{j \mid e_j^T B(x) = 0\}$ , 其中  $e_j$  为单位矩阵的第  $j$  列. 不妨设  $J$  中的元素个数为  $m$ , 定义

$$A_{i,J}(x) = [A_{i,j_1}^T(x), \dots, A_{i,j_m}^T(x)]^T,$$

$$\tilde{x} = [x_{j_1}, \dots, x_{j_m}]^T, j_k \in J, k = 1, 2, \dots, m.$$

## 2 鲁棒稳定性分析与状态反馈镇定控制

**定理 1** 考虑系统(2), 假设  $u(x) = 0$ . 定义 Lyapunov 函数  $V(x) = Z^T(x)P(x)Z(x)$ ,  $P(x)$  为待定的正定多项式矩阵, 则以下条件条件是等价的:

1) 存在正定多项式矩阵  $P(x)$  及多项式矩阵  $T(x)$ , 使得  $\dot{V}_{T1}(x) < 0$ ,  $\dot{V}_{T2}(x) \leq 0$ ;

2) 存在正定多项式矩阵  $P(x)$ , 使得  $\dot{V}(x) < 0$ . 其中

$$\dot{V}_{T1}(x) = Z^T(x)[A^T(x)M^T(x)P(x) + (x)M(x)A(x) + T(x)]Z(x);$$

$$\dot{V}_{T2}(x) = Z^T(x) \left[ -T(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_j}(x)(A_j(x)Z(x)) \right] Z(x).$$

**证明** 由  $V(x)$  的表达式可得

$$\dot{V}(x) = Z^T(x) \left[ A^T(x)M^T(x)P(x) + P(x)M(x)A(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_j}(x)(A_j(x)Z(x)) \right] Z(x). \quad (6)$$

1) 条件 1)  $\Rightarrow$  条件 2), 显然成立.

2) 证明条件 2)  $\Rightarrow$  条件 1).

如果条件 2) 成立, 即存在  $\bar{P}(x) > 0$ , 使得

$$Z^T(x) \left[ A^T(x)M^T(x)\bar{P}(x) + \bar{P}(x)M(x)A(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j}(x)(A_j(x)Z(x)) \right] Z(x) < 0, \quad (7)$$

则对于条件 1), 一定存在

$$P(x) = \bar{P}(x), T(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j}(x)(A_j(x)Z(x)),$$

使得

$$\dot{V}_{T1}(x) = \dot{V}(x) < 0, \dot{V}_{T2}(x) = 0.$$

若令  $T(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j}(x)(A_j(x)Z(x)) + \varepsilon I$ , 其中  $\varepsilon$  为充分小的正数, 则可得

$$\dot{V}_{T1}(x) = \dot{V}(x) + \varepsilon I < 0, \dot{V}_{T2}(x) = -\varepsilon I < 0.$$

因此, 条件 2)  $\Rightarrow$  条件 1) 成立.  $\square$

**注 1** 定理 1 给出了  $\dot{V}(x) < 0$  的一个等价条件, 解决了  $\dot{V}(x)$  中同时处理  $P(x)$  和  $\partial P(x)/\partial x$  带来的潜在困难. 由证明可知, 条件 1)  $\dot{V}_{T1}(x) < 0, \dot{V}_{T2}(x) \leq 0$  亦可替换成  $\dot{V}_{T1}(x) < 0, \dot{V}_{T2}(x) < 0$ . 基于 SOS 技术便于求解半定约束条件, 故采用条件 1).

## 2.1 鲁棒稳定性分析

**引理 2** (S-procedure)<sup>[20]</sup> 对于  $\sigma_1(y) = y^T Q_1 y \geq 0$ , 假定存在一个  $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$ , 使得  $\sigma_1(\tilde{y}) > 0$ , 则以下两个条件是等价的:

1) 对于使得  $\sigma_1(y) \geq 0$  的所有非零  $y \in \mathbf{R}^m$ ,  $y^T Q_0 y > 0$ ;

2) 存在  $\tau \geq 0$ , 使得  $Q_0 - \tau Q_1 > 0$ .

**定理 2** 考虑系统 (2), 假设  $u(x) = 0$ , 如果存在多项式矩阵  $P(x), T(x), X(x)$ , SOS 多项式  $s(x) > 0$  及标量  $\tau > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \pi_\ell > 0, r_\ell > 0, \sigma_\ell > 0, \nu_\ell > 0 (\ell = 1, 2, \dots, n)$ , 使得

$$\xi^T(P(x) - \tau I)\xi - \sum_{\ell=1}^n \pi_\ell \zeta_\ell^T(v_\ell^2 - x_\ell^2)\zeta_\ell, \quad (8)$$

$$- \xi_1^T \Xi_{T1s}(x)\xi_1 - \sum_{\ell=1}^n r_\ell \zeta_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\zeta_\ell, \quad (9)$$

$$- \xi_2^T \Xi_{T2}(x)\xi_2 - \sum_{\ell=1}^n \sigma_\ell \eta_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\eta_\ell \quad (10)$$

是 SOS, 则系统平衡状态  $x = 0$  在  $x \in \beta_\nu$  内渐近稳定. 其中

$$\Xi_{T1s}(x) = \Xi_{T1}(x) + s(x)I;$$

$$\Xi_{T2}(x) = \begin{bmatrix} -Z^T(x)T(x)Z(x) & * & * \\ \varphi^T(x) & -2\varepsilon_2 I & * \\ A(x)Z(x) & 0 & -2\varepsilon_2^{-1}I \end{bmatrix};$$

$$\Xi_{T1}(x) = \begin{bmatrix} P(x) - X(x) - X^T(x) & * \\ X(x) + \varepsilon_1 M(x)A(x)X(x) & \varepsilon_1 T(x) - P(x) \end{bmatrix};$$

$$\varphi(x) = \left[ Z^T(x) \frac{\partial P}{\partial x_1}(x)Z(x), \dots, Z^T(x) \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)Z(x) \right];$$

$\xi, \xi_1, \xi_2$  为适当维数的任意列向量;  $\zeta_\ell, \varsigma_\ell, \eta_\ell$  分别表示  $\xi, \xi_1, \xi_2$  中的元素, 即  $\zeta_\ell \in \xi, \varsigma_\ell \in \xi_1, \eta_\ell \in \xi_2$ .

**证明** 考虑如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V(x) = Z^T(x)P(x)Z(x). \quad (11)$$

由定理 1 知, 如果  $\dot{V}_{T1}(x) < 0, \dot{V}_{T2}(x) \leq 0$  成立,

则  $\dot{V}(x) < 0$ . 其中  $\dot{V}_{T1}(x), \dot{V}_{T2}(x)$  的定义同定理 1.

下面将证明式 (9) 和 (10) 是 SOS, 分别保证当状态满足  $x \in \beta_\nu$  时,  $\dot{V}_{T1}(x) < 0$  和  $\dot{V}_{T2}(x) \leq 0$ .

1) 式 (9) 是 SOS  $\Rightarrow \dot{V}_{T1}(x) < 0, x \in \beta_\nu$ .

考虑如下多项式矩阵:

$$\mathbf{F}(p, x) :=$$

$$\varepsilon_1 A^T(x)M^T(x)P(x) + \varepsilon_1 P(x)M(x)A(x) +$$

$$\varepsilon_1 T(x) + \varepsilon_1^2 M(x)A(x)P(x)A^T(x)M^T(x), \quad (12)$$

其中  $0 < \varepsilon_1 \ll 1$ . 显然,  $\mathbf{F}(p, x) < 0$  保证了  $\dot{V}_{T1}(x) < 0$ . 应用 Schur 补引理, 则  $\mathbf{F}(p, x) < 0$  等价于

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(x) & I + \varepsilon_1 A^T(x)M^T(x) \\ I + \varepsilon_1 M(x)A(x) & -P(x) + \varepsilon_1 T(x) \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

定义

$$\Phi(x) := (X^T(x) - P(x))P^{-1}(x)(X(x) - P(x)),$$

其中  $X(x)$  为适当维数的多项式矩阵. 由  $\Phi(x) \geq 0$  知

$$-X(x) - X^T(x) + P(x) \geq -X^T(x)P^{-1}(x)X(x). \quad (14)$$

对式 (13) 左乘  $\text{diag}(X^T(x), I)$  右乘  $\text{diag}(X(x), I)$ , 结合式 (14) 结论可得: 如果

$$\Xi_{T1s}(x) \leq 0, \quad (15)$$

则式 (13) 成立. 考虑多项式

$$\mathbf{H}_d(p, \xi_1, \varsigma, x) := -\xi_1^T \Xi_{T1s}(x)\xi_1 - \varsigma^T \Pi(x)\varsigma, \quad (16)$$

则式 (16) 等价于

$$\mathbf{H}_d(p, \xi_1, \varsigma, x) = -\xi_1^T \Xi_{T1s}(x)\xi_1 - \sum_{\ell=1}^n r_\ell \zeta_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\zeta_\ell.$$

其中:  $\Pi := \text{diag}(r_1\nu_1^2 - r_1x_1^2, \dots, r_n\nu_n^2 - r_nx_n^2)$ ;  $\varsigma \in \mathbf{R}^n$ , 且  $\varsigma$  中的元素属于  $\xi_1$ , 即  $\varsigma_\ell \in \varsigma, \varsigma_\ell \in \xi_1$ .

由引理 1, 若  $\mathbf{H}_d(p, \xi_1, \varsigma, x)$  是 SOS, 则可分解为

$$\mathbf{H}_d(p, \xi_1, \varsigma, x) = q^T \Omega_0 q - \sum_{\ell=1}^n r_\ell q^T \Omega_\ell q \geq 0. \quad (17)$$

其中:  $q$  表示由变量  $\xi_{1\ell}, \varsigma_\ell, x_\ell$  构成的适当的单项式向量;  $\Omega_0, \Omega_\ell$  表示适当维数的常数矩阵;  $\xi_{1\ell}, \varsigma_\ell$  分别表示向量  $\xi_1, \varsigma$  中的元素;  $x_\ell$  为系统状态量.

式 (17) 等价于一个半定约束

$$\Omega_0 - \sum_{\ell=1}^n r_\ell \Omega_\ell \geq 0, r_\ell \geq 0. \quad (18)$$

结合引理 2, 可知  $\mathbf{H}_d(p, \xi_1, \varsigma, x) \geq 0$ , 保证了当  $x \in \beta_\nu$  时,  $-\xi_1^T \Xi_{T1s}(x)\xi_1 \geq 0$ , 即式 (9) 是 SOS, 则  $\dot{V}_{T1}(x) < 0, x \in \beta_\nu$ .

2) 式 (10) 是 SOS  $\Rightarrow \dot{V}_{T2}(x) \leq 0, x \in \beta_\nu$ .

考虑下列关系式:

$$\dot{V}_{T2}(x) = \sum_{j=1}^n Z^T(x) \frac{\partial P}{\partial x_j}(x)Z(x)(A_j(x)Z(x)) - Z^T(x)T(x)Z(x),$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{T2}(x) = & -Z^T(x)T(x)Z(x) + \varphi(x)A(x)Z(x) \leq \\ & -Z^T(x)T(x)Z(x) + \frac{1}{2}[\varepsilon_2^{-1}\varphi(x)\varphi^T(x) + \\ & \varepsilon_2 Z^T(x)A^T(x)A(x)Z(x)].\end{aligned}\quad (19)$$

结合 Schur 补引理及 1) 的推导可知, 式 (10) 是 SOS, 保证了  $\dot{V}_{T2}(x) \leq 0, x \in \beta_\nu$ .

综上, 式 (9) 和 (10) 是 SOS, 分别保证了  $\dot{V}_{T1}(x) < 0, \dot{V}_{T2}(x) \leq 0, x \in \beta_\nu$ , 即  $\dot{V}(x) < 0, x \in \beta_\nu$ . 结合条件 (8) 可得系统是渐近稳定的.  $\square$

**注 2** 在式 (12) 中通过引入一个充分小的量  $\sigma := \varepsilon^2 M(x)A(x)P(x)A^T(x)M^T(x)$  使  $P(x)$  和  $A(x)$  分离, 该思想在线性系统框架下已有类似的应用<sup>[6]</sup>, 然而非线性系统中只适用于讨论局部问题. S-procedure 技术保证了求解局部问题时, 小量假设成立, 且  $\varepsilon$  取充分小时,  $\sigma$  充分小, 因此不会带来保守性.

定理 2 给出了系统 (2) 局部鲁棒稳定的分析条件, 并将 Lyapunov 函数矩阵  $P(x)$  与系统矩阵  $A(x)$  分离, 使得该方法适合推广到应用参数依赖 Lyapunov 函数思想研究含多面体不确定性系统的控制问题.

**定理 3** 考虑系统 (4), 假设  $u(x) = 0$ , 如果存在多项式矩阵  $P_i(x), T_i(x), X(x)$ , SOS 多项式  $s_i(x) > 0$  及标量  $\tau_i > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \pi_\ell > 0, r_\ell > 0, \sigma_\ell > 0, \nu_\ell > 0 (i = 1, 2, \dots, k, \ell = 1, 2, \dots, n)$ , 使得

$$\Psi_{1,i}(x) := \xi^T(P_i(x) - \tau_i I)\xi - \sum_{\ell=1}^n \pi_\ell \zeta_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\zeta_\ell, \quad (20)$$

$$\Psi_{2,i}(x) := -\xi_1^T \Xi_{T1s,i}(x)\xi_1 - \sum_{\ell=1}^n r_\ell \varsigma_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\varsigma_\ell, \quad (21)$$

$$\Psi_{3,i}(x) := -\xi_2^T \Xi_{T2,i}(x)\xi_2 - \sum_{\ell=1}^n \sigma_\ell \eta_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\eta_\ell \quad (22)$$

是 SOS, 则系统平衡状态  $x = 0$  在  $x \in \beta_\nu$  内渐近稳定. 其中

$$\Xi_{T1s,i}(x) = \Xi_{T1,i}(x) + s_i(x)I;$$

$$\Xi_{T2,i} = \begin{bmatrix} -Z^T(x)T_i(x)Z(x) & * & * \\ \varphi_i^T(x) & -2\varepsilon_2 I & * \\ A_i(x)Z(x) & 0 & -2\varepsilon_2^{-1}I \end{bmatrix};$$

$$\Xi_{T1,i}(x) = \begin{bmatrix} P_i(x) - X(x) - X^T(x) & * \\ X(x) + \varepsilon_1 M(x)A_i(x)X(x) & \varepsilon_1 T_i(x) - P_i(x) \end{bmatrix};$$

$$\varphi_i(x) = \left[ Z^T(x) \frac{\partial P_i}{\partial x_1}(x)Z(x), \dots, Z^T(x) \frac{\partial P_i}{\partial x_n}(x)Z(x) \right];$$

其他参数定义同定理 2.

**证明** 定义参数依赖的 Lyapunov 函数如下:

$$V(\delta, x) := Z^T(x) \sum_{i=1}^k \delta_i P_i(x)Z(x) =$$

$$Z^T(x)P(\delta, x)Z(x). \quad (23)$$

经计算, 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\delta, x) = & Z^T(x) \left[ A^T(\delta, x)M^T(x)P(\delta, x) + \right. \\ & P(\delta, x)M(x)A(\delta, x) + \\ & \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial P(\delta, x)}{\partial x_j} (A_j(\delta, x)Z(x)) \right] Z(x).\end{aligned}$$

引入矩阵  $T(\delta, x)$ , 则  $\dot{V}(\delta, x) < 0$  等价于

$$\dot{V}_{T1}(\delta, x) < 0, \dot{V}_{T2}(\delta, x) \leq 0. \quad (24)$$

其中  $\dot{V}_{T1}(\delta, x), \dot{V}_{T2}(\delta, x)$  的定义同  $\dot{V}_{T1}(x), \dot{V}_{T2}(x)$ .

结合定理 2 的推导可得出以下结论:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) := & \xi^T(P(\delta, x) - \tau(\delta)I)\xi - \\ & \sum_{\ell=1}^n \pi_\ell \zeta_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\zeta_\ell \geq 0 \Rightarrow \\ & V(\delta, x) > 0, x \in \beta_\nu, x \neq 0;\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(x) := & -\xi_1^T \Xi_{T1s,\delta}(\delta, x)\xi_1 - \\ & \sum_{\ell=1}^n r_\ell \varsigma_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\varsigma_\ell \geq 0 \Rightarrow \\ & \dot{V}_{T1}(\delta, x) < 0, x \in \beta_\nu;\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\Psi_3(x) := & -\xi_2^T \Xi_{T2,\delta}(\delta, x)\xi_2 - \\ & \sum_{\ell=1}^n \sigma_\ell \eta_\ell^T(\nu_\ell^2 - x_\ell^2)\eta_\ell \geq 0 \Rightarrow \\ & \dot{V}_{T2}(\delta, x) \leq 0, x \in \beta_\nu.\end{aligned}\quad (27)$$

其中: 定理 2 的推导中将  $\tau, A(x), P(x), s(x)$  和  $T(x)$  分别用  $\tau(\delta), A(\delta, x), P(\delta, x), s(\delta, x)$  和  $T(\delta, x)$  代替, 可得  $\Xi_{T1s,\delta}(\delta, x)$  和  $\Xi_{T2,\delta}(\delta, x), \tau(\delta), s(\delta, x), T(\delta, x)$  定义同  $P(\delta, x)$ .

$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x)$  关于不确定参数  $\delta$  是凸的, 因此  $\Psi_{1,i}(x), \Psi_{2,i}(x), \Psi_{3,i}(x) (i = 1, 2, \dots, k)$  是 SOS, 保证了  $\Psi_1(x) \geq 0, \Psi_2(x) \geq 0, \Psi_3(x) \geq 0$ , 进而可得当  $x \in \beta_\nu$  时,  $V(\delta, x) > 0, \dot{V}(\delta, x) < 0$ , 即当状态满足  $x \in \beta_\nu$  时, 系统 (4) 是渐近稳定的.  $\square$

**注 3** 定理 3 将定理 2 的方法推广到多面体不确定多项式系统, 得到基于参数依赖 Lyapunov 函数的鲁棒稳定性分析条件, 对于每一个子系统  $A_i(x)$  均有对应的 Lyapunov 函数  $V_i(x) = Z^T(x)P_i(x)Z(x)$  保证其渐近稳定性, 理论上较二次稳定方法保守性小.

## 2.2 鲁棒镇定

**定理 4** 考虑系统 (4), 如果存在多项式矩阵  $P_i(\tilde{x}), T_i(x), X(x), Y(x)$ , SOS 多项式  $s_i(x) > 0$  及标量  $\tau_i > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \pi_\ell > 0, r_\ell > 0, \sigma_\ell > 0, \nu_\ell > 0 (i = 1, 2, \dots, k, \ell = 1, 2, \dots, n)$ , 使得

$$\xi^T(P_i(\tilde{x}) - \tau_i I)\xi - \sum_{\ell=1}^n \pi_\ell \zeta_\ell^T(v_\ell^2 - x_\ell^2)\zeta_\ell, \quad (28)$$

$$- \xi_1^T \Xi_{cT1s,i}(x)\xi_1 - \sum_{\ell=1}^n r_\ell \zeta_\ell^T(v_\ell^2 - x_\ell^2)\zeta_\ell, \quad (29)$$

$$- \xi_2^T \Xi_{cT2,i}(x)\xi_2 - \sum_{\ell=1}^n \sigma_\ell \eta_\ell^T(v_\ell^2 - x_\ell^2)\eta_\ell \quad (30)$$

是 SOS, 则闭环系统的局部鲁棒镇定问题可解, 且状态反馈控制律  $u(x) = Y(x)X^{-1}(x)Z(x)$  保证了当状态满足  $x \in \beta_\nu$  时, 闭环系统渐近稳定. 其中

$$\Xi_{cT1s,i}(x) = \Xi_{cT1,i}(x) + s_i(x)I;$$

$$\Xi_{cT2,i} = \begin{bmatrix} -Z^T(x)T_i(x)Z(x) & * & * \\ \varphi_{ci}^T(\tilde{x}) & -2\varepsilon_2 I & * \\ A_{i,J}(x)Z(x) & 0 & -2\varepsilon_2^{-1}I \end{bmatrix};$$

$$\Xi_{cT1,i}(x) = \begin{bmatrix} P_i(\tilde{x}) - X(x) - X^T(x) & * \\ \Upsilon_i(x) & \varepsilon_1 T_i(x) - P_i(\tilde{x}) \end{bmatrix};$$

$$\Upsilon_i(x) = X(x) + \varepsilon_1 M(x)(A_i(x)X(x) + B_i(x)Y(x));$$

$$\varphi_{ci}(\tilde{x}) = \left[ Z^T(x) \frac{\partial P_i}{\partial x_{j_1}}(\tilde{x})Z(x), \dots, Z^T(x) \frac{\partial P_i}{\partial x_{j_m}}(\tilde{x})Z(x) \right];$$

其他参数定义同定理 2.

**证明** 系统 (4) 与状态反馈  $u = K(x)Z(x)$  构成的闭环系统为

$$\dot{x} = (A(\delta, x) + B(\delta, x)K(x))Z(x). \quad (31)$$

受文献 [12] 启发, 对闭环系统 (31) 定义如下形式的参数依赖 Lyapunov 函数:

$$V(x) := Z^T(x) \sum_{i=1}^k \delta_i P_i(\tilde{x}) Z(x) = Z^T(x) P(\delta, \tilde{x}) Z(x). \quad (32)$$

结合定理 3 的证明, 在推导过程中将  $P(\delta, x)$ ,  $A(\delta, x)$  分别用  $P(\delta, \tilde{x})$ ,  $A(\delta, x) + B(\delta, x)K(x)$  替代, 并令  $Y(x) = K(x)X(x)$  可得定理 4 结论.

由式 (29) 是 SOS 保证了  $P_i(\tilde{x}) - X(x) - X^T(x) < 0$ , 即  $P_i(\tilde{x}) < X(x) + X^T(x)$ , 所以  $X(x)$  为非奇异矩阵, 进而可得  $K(x) = Y(x)X^{-1}(x)$ .  $\square$

**注 4** 在定理 4 鲁棒镇定问题的证明中存在着非凸项

$$\Theta(x) := \sum_{j \in J} \frac{\partial P(\delta, \tilde{x})}{\partial x_j} (B_j(\delta, x)K(x)Z(x)),$$

由  $P(\tilde{x})$  的引入以及前文的定义知  $B_j(x) = 0$ ,  $j \in J$ , 使得  $\Theta(x) = 0$ , 有效简化了问题的复杂性.

**注 5** 定理 2 和定理 3 中 Lyapunov 函数亦可设计成  $V(x) = Z^T(x)P(\tilde{x})Z(x)$ , 所得的结论形式上与取  $P(x)$  完全相同. 但是,  $V(x)$  中取  $P(x)$  所得到的约束条件解存在的可能性理论上要大于取  $P(\tilde{x})$  的情形.

### 3 数值仿真

考虑如下非线性系统:

$$Z(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A(x) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x_1 & -x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (33)$$

其中  $\alpha$  为系统的不确定参数, 满足  $0.5 \leq \alpha \leq 1.5$ .

系统 (33) 可表示为基于式 (4) 的多面体系统. 其中  $k = 2$ ,  $A_1(x) = A_2(x) = A(x)$ ,  $B_1(x) = [0 \ 0.5]^T$ ,  $B_2(x) = [0 \ 1.5]^T$ .

假设系统的状态属于集合  $\beta_\nu$ , 其中  $\beta_\nu$  中参数为  $n = 2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.5$ . 取初始状态  $x_0 = [0.4 \ 0.4]^T$ , 图 1 为开环系统状态响应轨迹.

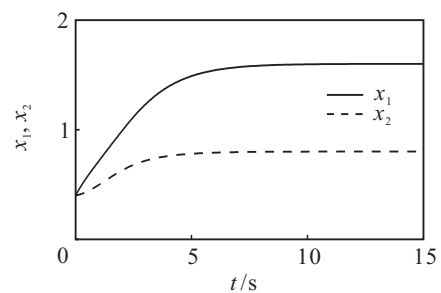


图 1 开环系统状态轨迹

定义 Lyapunov 函数  $V(x) = Z^T(x)P(\tilde{x})Z(x)$ , 其中  $\tilde{x} = x_1$ . 构造  $P_i(\tilde{x})$  和  $T_i(x)$ ,  $X(x)$ ,  $Y(x)$  分别为  $\tilde{x}$  和  $x$  的 2 次多项式矩阵, 取  $\tau_1 = \tau_2 = 0.001$ ,  $\varepsilon_1 = 0.0001$ ,  $\varepsilon_2 = 0.1$ ,  $s_1(x) = s_2(x) = 0.00001$ ,  $\pi_1 = \pi_2 = 0.01$ ,  $r_1 = r_2 = 0.0001$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0.0001$ , 利用定理 4 结论, 可得闭环系统局部稳定的状态反馈控制器

$$u(x) = \frac{a(x)(b(x)x_1 - d(x)x_2) + c(x)(e(x)x_2 - d(x)x_1)}{g(x)}.$$

其中

$$a(x) = -0.84x_1^2 - 7.4x_1x_2 - 0.74x_2^2 -$$

$$3.9x_1 - 0.55x_2 - 7.7,$$

$$b(x) = 2.8 \times 10^{-4}x_1^2 + 2 \times 10^{-4}x_2^2 +$$

$$5 \times 10^{-5}x_1 - 8 \times 10^{-6}x_2 + 5.7,$$

$$c(x) = 2.7x_1^2 + 0.1x_1x_2 + x_2^2 -$$

$$0.15x_1 - 0.065x_2 - 18.4,$$

$$d(x) = 4 \times 10^{-5}x_1^2 - 1 \times 10^{-4}x_1x_2 +$$

$$0.001x_1 + 1 \times 10^{-4}x_2 - 0.9,$$

$$e(x) = 6 \times 10^{-4}x_1^2 + 0.001x_2^2 -$$

$$5 \times 10^{-4}x_1 + 1 \times 10^{-3}x_2 + 5.3,$$

$$g(x) = -2.86 \times 10^{-4}x_1 + 5.5 \times 10^{-3}x_2 -$$

$$2.3 \times 10^{-4}x_1x_2 + 29.6 +$$

$$\begin{aligned}
& 5.3 \times 10^{-7} x_1^2 x_2 + 5 \times 10^{-3} x_1^2 + \\
& 7.5 \times 10^{-3} x_2^2 + 2 \times 10^{-7} x_2^4 + \\
& 1.5 \times 10^{-7} x_2^3 - 2.1 \times 10^{-7} x_1^3 + \\
& 1.7 \times 10^{-7} x_1^4 + 4 \times 10^{-7} x_2^2 x_1^2.
\end{aligned}$$

此时, 多面体不确定系统 (33) 可表示为

$$\dot{x} = A(x)Z(x) + (\delta B_1(x) + (1 - \delta)B_2(x))u(x). \quad (34)$$

其中  $\delta \in \mathbf{R}$ ,  $\delta \in [0, 1]$ . 不妨设  $\delta = \text{rand}()$ , 其中,  $\text{rand}()$  表示 Matlab 产生的 0 和 1 之间的随机数. 仿真结果如图 2 所示, 结果表明状态反馈控制器  $u(x)$  保证了闭环系统 (34) 在  $x \in \beta_v$  内的稳定性, 且状态轨迹收敛到零, 即闭环系统是渐近稳定的.

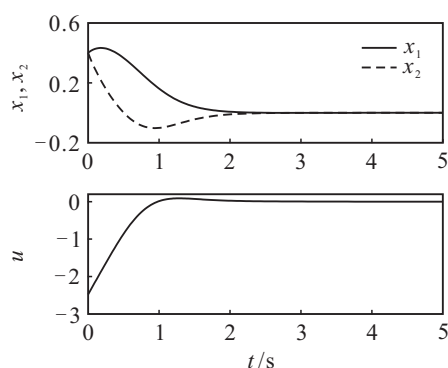


图 2 Matlab 返回  $\delta = 0.8147$  时闭环系统响应

## 4 结 论

本文研究一类含多面体不确定性多项式系统的局部鲁棒稳定控制问题. 结合多项式平方和 (SOS) 理论与 S-procedure 技术, 将具有状态约束的非线性局部稳定控制问题转换为凸的 SOS 规划问题, 并给出该类系统的局部鲁棒稳定性分析与状态反馈镇定控制问题在 SOS 理论框架下的可解性条件. 本文的优点在于将线性系统框架下的一些重要思想无障碍地推广到非线性系统中, 且所得到的基于 SOS 的可解性条件, 可用 MatLab 下的 SOSTools 获得精确的解析解, 在一定程度上克服了非线性系统控制理论中普遍存在的计算与构造 Lyapunov 函数的困难. 此外, 文中只给出了状态反馈镇定控制器的设计方法, 如何将其推广到该类系统的输出反馈和优化控制等问题上, 是一个有意义, 值得进一步研究的问题.

## 参考文献 (References)

- [1] Garofalo F, Celentano G, Glielmo L. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1993, 38(2): 281-284.
- [2] Biernacki R M, Hwang H, Battacharyya S P. Robust stability with structured real parameter perturbation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(6): 495-506.
- [3] He Y, Wu M, She J H. Improved Bounded-Real-Lemma representation and  $H_\infty$  control of system with polytopic

- uncertainties[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2005, 52(7): 380-383.
- [4] Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition[J]. Systems & Control Letters, 1999, 36(2): 135-141.
- [5] Bo W J, Li L. Further improvement on LMI representations for the analysis and design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty[C]. Proc of Asian Contr Conf. Melbourne, 2004: 1130-1136.
- [6] Shaked U. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(4): 652-656.
- [7] Jia Y. Alternative proofs for improved LMI representation for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty: A predictive approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(8): 1413-1416.
- [8] Valter J S, Peres P L D. An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(3): 500-504.
- [9] Wu J L. Robust stabilization for single-input polytopic nonlinear system[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(9): 1492-1496.
- [10] Mo L P. Robust stabilization for multi-input polytopic nonlinear systems[J]. J of Systems Science and Complexity, 2011, 24(1): 93-104.
- [11] Xu J, Xie L H, Wang Y Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(8): 1892-1897.
- [12] Prajna S, Papachristodoulou A, Wu Fen. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach[C]. Proc of the Asian Control Conf. Melbourne, 2004: 157-165.
- [13] Ma H J, Yang G H. FTC synthesis for nonlinear systems: Sum of Squares optimization approach[C]. Proc of the 46th IEEE Conf on Decision and Control. New Orleans: IEEE Press, 2007: 2645-2650.
- [14] Zheng Q, Wu F. Nonlinear output feedback control for polynomial nonlinear systems[C]. Proc of the 2008 American Control Conf. Washington, 2008: 1196-1201.
- [15] Xu J, Xie L H, Wang Y Y. Synthesis of discrete-time nonlinear systems: A SOS approach [C]. Proc of the 2007 American Control Conf. New York, 2007: 4829-4834.
- [16] Prajna S, Papachristodoulou A, Seiler P, et al. SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for Matlab[Z]. Pasadena: California Institute of Technology, 2004.

(下转第1348页)



- design problems[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(2): 1676-1683.
- [8] Sun J, Lai C H, Xu W B, et al. A modified quantum-behaved particle swarm optimization [C]. Proc of IEEE Conf on Computational Science. Beijing: IEEE, 2007: 294-301.
- [9] 龙海侠, 马生全. 基于多样性变异的量子行为粒子群优化算法[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(6): 2064-2066.  
(Long H X, Ma S Q. Quantum-behaved particle swarm optimization with diversity guided mutation[J]. Application Research of Computers, 2011, 28(6): 2064-2066.)
- [10] 林星, 冯斌, 孙俊. 混沌量子粒子群优化算法[J]. 计算机工程与设计, 2008, 29(10): 2610-2612.  
(Lin X, Feng B, Sun J. Chaos quantum-behaved particle swarm optimization algorithm[J]. Computer Engineering and Design, 2008, 29(10): 2610-2612.)
- [11] Liu J, Sun J, Xu W B. Improving quantum-behaved particle swarm optimization by simulated annealing[J]. Computational Intelligence and Bioinformatics, 2006, 4115: 130-136.
- [12] Chen D B, Wang J T. An improved group search optimizer with operation of quantum-behaved swarm and its application[J]. Applied Soft Computing, 2012, 12(2): 712-725.
- [13] 朱颢东, 李红婵. 新的自适应免疫量子粒子群优化算法[J]. 微电子学与计算机, 2011, 28(3): 123-125.  
(Zhu H D, Li H C. New adaptive immune quantum-behaved particle swarm optimization algorithm[J]. Micro electronics and Computer, 2011, 28(03): 123-125.)
- [14] 龙海侠, 须文波, 王小根, 等. 基于选择操作的量子粒子群算法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1499-1506.  
(Long H X, Xu W B, Wang X G, et al. Using selection to improve quantum-behaved particle swarm optimization[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1499-1506.)
- [15] 田雨波, 彭涛, 沙莎. 基于微分进化算子和混沌扰动的量子粒子群算法[J]. 江苏科技大学学报: 自然科学版, 2011, 25(2): 158-162.  
(Tian Y B, Peng T, Sha S. Improved quantum-behaved particle swarm optimization algorithm based on differential evolution operator and chaos disturbance[J]. J of Jiangsu University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2011, 25(2): 158-162.)
- [16] Sun J, Fang W, Palade V, et al. Quantum-behaved particle swarm optimization with Gaussian distributed local attractor point[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(7): 3763-3775.
- [17] 李盼池, 王海英, 宋考平, 等. 量子势阱粒子群优化算法的改进研究[J]. 物理学报, 2012, 61(6): 1-10.  
(Li P C, Wang H Y, Song K P, et al. Research on the improvement of quantum potential well-based particle swarm optimization algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(6): 1-10.)
- [18] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm: Explosion, stability, and convergence in a multi-dimensional complex space[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-73.
- [19] 刘军民, 高岳林. 混沌粒子群优化算法[J]. 计算机应用, 2008, 28(2): 322-325.  
(Liu J M, Gao Y L. Chaos particle swarm optimization algorithm[J]. Computer Applications, 2008, 28(2): 322-325.)
- [20] 逢珊, 杨欣毅, 张小峰. 混沌映射的多种群量子粒子群优化算法[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(33): 56-62.  
(Pang S, Yang X Y, Zhang X F. Chaotic mapping multi population quantum-behaved particle swarm optimization algorithm[J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(33): 56-62.)

(上接第1334页)

- [17] Lofberg J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in Matlab[C]. Proc of 2004 IEEE Int Symposium on Computer Aided Control Systems Design. Taipei, 2004: 284-289.
- [18] Parrilo P A, Sturmfels B. Minimizing polynomial functions[C]. Workshop on Algorithmic and Quantitative Aspects of Real Algebraic Geometry in Mathematics and Computer Science 2001. Providence : American Mathematical Society, 2003: 83-100.
- [19] Reznick B. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem[C]. Contemporary Mathematics. Providence : American Mathematical Society, 2000: 251-272.
- [20] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 21-22.  
(Yu L. Robust control—Linear matrix inequality approach[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 21-22.)